Oral ENSSAT 2012

Mathématiques – MLRa3

MP/PC/PSI

30 minutes de préparation, 25 minutes de présentation. Le candidat traitera obligatoirement les deux parties, dans l'ordre de son choix. Documents et calculatrice interdits.

Partie 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et p un endomorphisme de E tel que p^2 soit un projecteur.

1. Quelles sont les valeurs propres possibles pour p ?
2. Montrer que p est diagonalisable si et seulement si : $p^3 = p$.

Partie 2

1. Etudier la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ suivant la valeur du réel α.
2. Lorsque la série précédente converge, comment peut-on obtenir une valeur approchée de sa somme à 10^{-3} près ?
3. Soit $\alpha > 0$. On considère la série de terme général : $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{2n^{2\alpha}}\right)$.

   Dans quels cas cette série est-elle absolument convergente ? convergente ?

Indications

Partie 1

1. $P = X^4 - X^2 = X^2(X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur donc : $sp(p) \subset \{0,-1,1\}$
2. $\Leftarrow$: $Q = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur scindé à racines simples donc p est diagonalisable

$\Rightarrow$: si p diagonalisable, alors $\prod_{\lambda \in sp(p)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur d'où la conclusion d'après 1.

OU : il existe une base dans laquelle la matrice de p est une matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux sont 0,1 ,-1. Donc $D^3 = D$ et $p^3 = p$.

Partie 2

1 et 2 : questions de cours : Critère spécial des séries alternées

3. En prenant un équivalent : Cv absolue ssi $\alpha > 1$.

Un développement asymptotique donne : $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{(-1)^n}{6n^{3\alpha}} + \frac{1}{8n^{4\alpha}} + o_\infty\left(\frac{1}{n^{4\alpha}}\right)$. La série converge si et seulement si : $\alpha > \frac{1}{4}$.